

# 特集 車載用アレイセンサにおけるアレイ誤差存在下での性能解析\*

## A Performance Analysis of Unitary Transformation Method in the Presence of Array Errors

山野 千晴

Chiharu YAMANO

夏目 一馬

Kazuma NATSUME

For the purpose of awareness of area surrounding vehicle and in-vehicle situation robustly with high precision, the array sensor that uses two or more receiving element is available.

In this paper, from the point of view to accomplish both performance gain and calculation cost reduction, we focused on the technique of array signal processing (unitary method) and considered theoretical performance analysis about the effect of array error.

By deriving the equivalent-array error to the one in non-unitary method, we succeeded in applying the conventional theory to the case of unitary method.

Moreover, we also clarified the relationship between each performance mark and the amount of array error.

**Key words :** Automotive sensor signal processing, Array signal processing, Array response error, Performance analysis, Unitary transformation method, Direction-of-arrival estimation, Subspace-based method

### 1. まえがき

車の安全性・快適性のさらなる向上といったニーズに対し、車両周辺や車室内の空間的状況をロボスタかつ高精度に把握することが要求される。このような用途へ向けたセンシングの一手段として、複数の受信素子（アレイ）からの信号に対し、信号処理技術によって対象物の方位情報などを推定するアレイセンサ技術<sup>1)2)</sup>が有望と考え取組みを行っている。

アレイ信号処理として近年着目される技術の一つに部分空間に基づく方位推定手法<sup>2)</sup>があり、この上で性能向上および演算リソース削減の両立を可能とするユニタリ手法<sup>3)</sup>に我々は着目した。

ユニタリ手法の適用にあたっては各アレイ素子特性の間に特別な構造（中心対称性）を必要とする。しかしながら、実用上はアレイ特性にある程度の誤差（アレイ誤差）が存在するため、この場合の性能についての解析が必要となる。

そこで、我々はこの課題について理論的な解析を試みた。その結果、ある条件下において等価なアレイ誤差を利用することで、ユニタリ手法における理論式を導出することができた。

以下、本論文ではこの詳細な内容について述べる。本文の構成は以下のとおりである。まず方位推定の概要を非ユニタリ手法とユニタリ手法の場合について簡単に述べる。次に、相関行列摂動の1次近似を利用し

てユニタリ手法における等価なアレイ誤差を導出し、これを従来理論式に適用することで各性能指標（方位推定誤差、分離性能）との関係を導く。さらに、シミュレーションにより妥当性を検証する。最後にむすびとして本検討で得られた知見をまとめる。

なお、本検討では、アレイの構造としては一様線形アレイ (ULA) を考慮している。

### 2. 部分空間に基づく方位推定<sup>1)</sup>

#### 2.1 非ユニタリの場合の方位推定

$K$  個の素子を有する一様線形アレイ (Uniform Linear Array: 以下ULAとする) に  $L$  個の信号が到来している場合について考える。 $k$  番目の素子における時刻における複素受信信号を  $x_k(t)$  と表す。すべてのアレイ素子での受信信号を  $\mathbf{x}(t) \triangleq [x_1(t) \cdots x_K(t)]^T$  のようにベクトル形式で表す。このとき、受信信号のデータモデルは以下のように表せる。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

ここで、

$\mathbf{s}(t)$ : 基準素子における到来波信号ベクトル

$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1 \cdots \theta_L\}$ : 各信号の到来方位

$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1) | \cdots | \mathbf{a}(\theta_L)]$ : 方向行列

$\mathbf{a}(\theta_l) = e^{j\omega_l(K-1)/2} [1 \cdots e^{-j\omega_l(K-1)}]$ : 方向ベクトル

\*2004年8月17日 原稿受理

$\mathbf{n}(t)$ : 熱雑音信号ベクトル  
 である.  $\mathbf{s}(t)$ は平均0 共分散 $\mathbf{R}_s$ 複素ガウス分布に従い,  
 また, $\mathbf{n}(t)$ は平均0 共分散 $\sigma_n^2 \mathbf{I}$ の複素ガウス分布に従い,  
 $\mathbf{s}(t)$ と $\mathbf{n}(t)$ は互いに無相関であるとする.

このとき, 受信データの相関行列 $\mathbf{R}_x$ は次式となる.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &\triangleq \varepsilon \langle \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \rangle \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $\varepsilon \langle \cdot \rangle$ は期待値演算を表す.

受信データ相関行列 $\mathbf{R}_x$ は, 以下のように固有値展開できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^H \\ &= \mathbf{E}_s\mathbf{\Lambda}_s\mathbf{E}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{E}_n\mathbf{E}_n^H \end{aligned} \quad (3)$$

ここで,

- $\mathbf{\Lambda}$ : 対角に固有値を含む行列
- $\mathbf{E}$ : 固有ベクトルを列ベクトルとして含む行列
- $\mathbf{\Lambda}_s$ : 対角に信号成分に対応した固有値を含む行列
- $\mathbf{E}_s$ : 信号成分に対応した固有ベクトルを列ベクトルとして含む行列
- $\mathbf{E}_n$ : 雑音成分に対応する固有ベクトルを列ベクトルとして含む行列

である.

部分空間に基づく方位推定 (例えばMUSIC法や最小ノルム法等) では,  $\mathbf{A}(\theta)$ と $\mathbf{E}_n$ の列ベクトルが互いに直交する性質を利用する. 具体的には, 次式で定義されるヌルスペクトル $D(\theta)$ が極小となる方位を見つけることで方位推定を行う.

$$\begin{aligned} D(\theta) &= \|\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{E}_n\|^2 \\ &= \text{tr}\{\mathbf{\Pi}_\theta\mathbf{\Pi}_n\} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで,

$\mathbf{\Pi}_\theta = \mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)$ : ステアリングベクトル $\mathbf{a}(\theta)$ が張る部分空間への射影行列

$\mathbf{\Pi}_n = \mathbf{E}_n\mathbf{E}_n^H$ : 雑音部分空間への射影行列

である.

$\text{tr}\{\cdot\}$ は行列のトレースを表す.

## 2.2 ユニタリ手法による方位推定

アレイ信号処理によるセンサでは素子数を増やすことで理論的には性能を向上させることができる. しか

しながら, 実際には, 素子数の増加につれてハードウェア実現や信号処理演算のためのコストがさらに必要となってくるという側面がある. そこで有効となる手法がユニタリ手法<sup>3)</sup>である. ユニタリ手法では各アレイ素子特性の間の特別な構造 (中心対称性) を利用することで性能向上と演算リソース削減を図ることが可能である. 以下, この手法について概要を説明する.

ユニタリ手法では, 方向行列が以下の関係を満足する (中心対称性の構造を有する) アレイを用いる.

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{A}} \quad (5)$$

ここで,  $\bar{\cdot}$ は複素共役を表し, また,  $\mathbf{J}$ は以下の置換行列である.

$$\mathbf{J} \triangleq \begin{bmatrix} & & & \mathbf{1} \\ & & \ddots & \\ & & & \\ \mathbf{1} & & & \end{bmatrix} \quad (6)$$

この条件下において, 次の式で実数の相関行列 $\mathbf{R}_y$ を算出することができる.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Q}_M^H \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_y = \text{Re}\{\varepsilon \langle \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t) \rangle\} \quad (8)$$

ここで,  $\text{Re}\{\cdot\}$ は実部をあらわす. ここで,  $\mathbf{Q}_M$ はユニタリ変換行列であり以下の式で定義される.

$$\mathbf{Q}_M = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & j\mathbf{I} \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} & -j\mathbf{J} \end{bmatrix} & K: \text{奇数のとき} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & j\mathbf{I} \\ \mathbf{J} & -j\mathbf{J} \end{bmatrix} & K: \text{偶数のとき} \end{cases} \quad (9)$$

ユニタリ手法では, 以上の実数化相関行列 $\mathbf{R}_y$ の固有ベクトルを利用して方位推定を行う. ところで, このユニタリ手法はフォワード・バックワード (FB) 平均法と等価であることが知られている. このことは, (8)式について以下のように変形できることから明らかである.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}}_y &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{Q}_M^H \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_M + \overline{\mathbf{Q}_M^H \mathbf{R}_x \mathbf{Q}_M} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{Q}_M^H \left( \mathbf{R}_x + \overline{\mathbf{J} \mathbf{R}_x \mathbf{J}} \right) \mathbf{Q}_M \\ &= \mathbf{Q}_M^H \mathbf{R}_x^{FB} \mathbf{Q}_M \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{xx}^{FB}$ は次式のFB平均法の相関行列を表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}^{FB} &\triangleq \left( \mathbf{R}_{xx} + \overline{\mathbf{J} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{J}} \right) / 2 \\ &= \left( \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H + \overline{\mathbf{J} \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H \mathbf{J}} \right) / 2 + \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A} \left( \frac{\mathbf{R}_s + \overline{\mathbf{R}_s}}{2} \right) \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (11)$$

このFB平均法の相関行列 $\mathbf{R}_{xx}^{FB}$ の雑音空間の固有ベクトルを求め、これを列ベクトルとして含む行列を $\mathbf{E}_N$ とする。このときユニタリ化方式におけるヌルスペクトル $D(\theta)$ は次式で求められる。

$$\begin{aligned} D(\theta) &= \left\| \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{E}_N \right\|^2 \\ &= \left\| \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}_M \mathbf{Q}_M^H \mathbf{E}_N \right\|^2 \\ &= \left\| \mathbf{d}^H(\theta) \mathbf{E}_{yN} \right\|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{d}(\theta) \triangleq \mathbf{Q}_M^H \mathbf{a}(\theta)$ は実数化されたモードベクトルであり、 $\mathbf{E}_{yN}$ は実数化相関行列 $\mathbf{R}_y$ から求めた実数の雑音空間固有ベクトルに対応する。以上の関係を利用して、ユニタリ手法ではヌルスペクトル算出までの演算を実数化することが可能となる。

### 3. アレイ誤差の性能への影響

部分空間に基づく方位推定では、真の相関行列を既知とした場合にはSNRによらない良好な方位推定性能や分離性能が得られる<sup>1)</sup>。

しかしながら、実環境においては前提としている様々な条件からのズレ（モデル誤差）が存在し、また、観測できるデータも有限である。このため、実際に受信データから求められる相関行列は、これらの誤差に起因するズレ（摂動）を含むものとなる。この相関行列の摂動は部分空間の摂動を生じさせ、さらにヌルベクトルの摂動を生じさせる。最終的には方位推定性能や分離性能を劣化させる原因となる。

着目するユニタリ手法では、中心対称性の仮定を必要としており、実用にあたってはアレイ誤差存在下での性能の定量把握が必要である。ここで、部分空間に

基づく方位推定手法について、アレイ誤差存在下での性能を解析した研究がある<sup>4)5)</sup>しかし、これらは非ユニタリ手法の場合を扱っているため、ユニタリ手法への適用法が明確ではない。一方、ユニタリ手法における性能を扱った研究<sup>6)</sup>がある。しかしながら、この検討ではいわゆる有限サンプル効果(Finite Sample Effect)を対象としており、アレイ誤差を扱っていない。

以上のような背景から我々はアレイ誤差に対するユニタリ手法の性能解析を課題として取り組んだ。そして、信号が無相関であるとの条件下で摂動項を一次近似することで、ユニタリ方式における等価なアレイ誤差を導出し、この等価アレイ誤差を従来の結果に利用することで、方位誤差およびResolution Threshold<sup>4)5)</sup>との定量関係把握を行うことを試みた。

以下の検討では、アレイ誤差の影響のみを明確にするため、有限サンプル効果を考慮していない。また、より実際的とされる<sup>4)</sup>方位依存性のあるアレイ誤差について対象とした。以下、アレイ誤差およびアレイ誤差に起因する摂動成分を含む項を記号 $\hat{\cdot}$ で表現し、その摂動成分を記号 $\tilde{\cdot}$ で表現する。

#### 3.1 アレイ誤差によるヌルスペクトル摂動

アレイ誤差を $\tilde{\mathbf{A}} \triangleq [\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdots \tilde{\mathbf{a}}_L] \triangleq [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1) \cdots \tilde{\mathbf{a}}(\theta_L)]$ とする。アレイ誤差を含む方向行列は次式となる。

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}} \quad (13)$$

このとき、受信信号ベクトルは次式となる。

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (14)$$

アレイ誤差による摂動成分を含む相関行列 $\hat{\mathbf{R}}_x$ は次式となる。

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{R}_s \hat{\mathbf{A}}^H + \sigma_N^2 \mathbf{I} \quad (15)$$

この相関行列の固有値展開は、以下のように摂動項を含む形式となる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_x &= \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{\Lambda}} \hat{\mathbf{E}}^H \\ &= \hat{\mathbf{E}}_s \hat{\mathbf{\Lambda}}_s \hat{\mathbf{E}}_s^H + \hat{\sigma}_N^2 \hat{\mathbf{E}}_N \hat{\mathbf{E}}_N^H \end{aligned} \quad (16)$$

摂動を含むヌルスペクトルは次式となる.

$$\begin{aligned} \hat{D}(\theta) &= \left\| \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{E}}_N \right\|^2 \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{\Pi}_\theta \hat{\mathbf{\Pi}}_N \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

### 3.2 ユニタリ化方式における等価アレイ誤差

非ユニタリの場合, アレイ誤差 $\hat{\mathbf{A}}$ を小さいとして(15)式を一次近似すれば, 摂動成分 $\tilde{\mathbf{R}}_x$ は以下のように近似できる.

$$\tilde{\mathbf{R}}_x \cong \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H + \mathbf{A} \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}^H \quad (18)$$

同様に, ユニタリ方式すなわちFB平均法においても摂動成分 $\tilde{\mathbf{R}}_x^{FB}$ の一次近似を求めることができる. 式(11)を利用すれば次式となる.

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathbf{R}}_x^{FB} &\cong \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H + \mathbf{A} \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}^H \\ &+ \left( \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{A}} \right) \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H + \mathbf{A} \mathbf{R}_s \left( \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{A}} \right)^H \end{aligned} \quad (19)$$

ここで, 従来検討<sup>5)</sup>同様に信号成分は互いに無相関であるという仮定を導入する. このとき $\mathbf{R}_s$ は対角項のみとなり $\mathbf{R}_s = \bar{\mathbf{R}}_s$ となるから, 式(19)は次式となる.

$$\tilde{\mathbf{R}}_x^{FB} \cong \tilde{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{R}}_s \mathbf{A}^H + \mathbf{A} \bar{\mathbf{R}}_s \tilde{\mathbf{A}}^H \quad (20)$$

ここで

$$\tilde{\mathbf{A}} \triangleq \frac{\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{A}}}{2} \quad (21)$$

としている. (18)式と(20)式の対比から, この(21)式で定義される $\tilde{\mathbf{A}}$ をユニタリ手法における等価アレイ誤差とみなすことができる. ユニタリ手法での相関行列は, この等価アレイ誤差を含む方向行列 $\hat{\mathbf{A}}$ によって次式で近似することができる.

$$\hat{\mathbf{R}}_x^{FB} \cong \hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{R}}_s \hat{\mathbf{A}}^H + \sigma_N^2 \mathbf{I} \quad (22)$$

### 3.3 方位誤差

非ユニタリ手法の場合, アレイ誤差 $\tilde{\mathbf{a}}_l$ と方位誤差 $\tilde{\theta}_l$ には次式の関係があることが知られている<sup>4)</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_l &\triangleq \hat{\theta}_l - \theta_l \\ &\cong \frac{-\text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{a}}_l^H \tilde{\mathbf{\Pi}}_N \mathbf{a}_l \right\}}{\tilde{\mathbf{a}}_l^H \tilde{\mathbf{\Pi}}_N \tilde{\mathbf{a}}_l} \\ &\cong \frac{\text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{a}}_l^H \tilde{\mathbf{\Pi}}_N \tilde{\mathbf{a}}_l \right\}}{\tilde{\mathbf{a}}_l^H \tilde{\mathbf{\Pi}}_N \tilde{\mathbf{a}}_l} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで,  $\tilde{\mathbf{a}}_l \triangleq \partial \mathbf{a}(\theta) / \partial \theta |_{\theta=\theta_l}$ としている.

ユニタリ手法での方位検出誤差 $\tilde{\theta}_l \triangleq \hat{\theta}_l - \theta_l$ を求めるには, 信号が無相関であれば, (23)式における $\tilde{\mathbf{a}}_l$ を(21)式の等価アレイ誤差 $\tilde{\mathbf{a}}_l$ で置き換えることで近似できる. これを計算すれば以下となる.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_l &\cong \frac{\text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{a}}_l^H \mathbf{P}_N \left( \tilde{\mathbf{a}}_l + \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{a}}_l \right) / 2 \right\}}{\tilde{\mathbf{a}}_l^H \mathbf{P}_N \tilde{\mathbf{a}}_l} \\ &= \frac{\text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{a}}_l^H \mathbf{P}_N \tilde{\mathbf{a}}_l \right\}}{\tilde{\mathbf{a}}_l^H \mathbf{P}_N \tilde{\mathbf{a}}_l} \cong \tilde{\theta}_l \end{aligned} \quad (24)$$

よって, アレイ誤差に起因する方位誤差はユニタリ手法と非ユニタリ手法で差がないことが分かる.

### 3.4 Resolution Threshold

次に, 複数波に対する分離性能を考える. アレイ誤差と分離性能に関する指標としてResolution Thresholdが提案されている.<sup>5)</sup> Resolution Thresholdは, ある方位差 $\Delta\theta$ で到来する2波を分離可能とするためのアレイ誤差分散 $\sigma_a^2$ の許容限界として定義される. 従来<sup>5)</sup>の検討においては, 方位依存性のあるアレイ誤差を考えており, また, 各方位に対応したアレイ誤差は互いに無相関であるという仮定を置いている. 本検討においてもこの仮定を採用する. すなわちアレイ誤差について次式の性質を仮定する.

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\langle \tilde{\mathbf{a}}_m \tilde{\mathbf{a}}_n^H \right\rangle &= \delta_{mn} \sigma_a^2 \mathbf{I} \\ \varepsilon \left\langle \tilde{\mathbf{a}}_m \tilde{\mathbf{a}}_n^T \right\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ここでの期待値演算は“アレイセンサ個体ごとに誤差が確率的に変動する”という意味において定義されている. また, 到来信号は等電力で無相関であるとする.

以上の条件下で, 非ユニタリ手法の場合には, Resolution Thresholdについて以下の関係式が導出されている.

$$\Delta\theta \triangleq \theta_2 - \theta_1 = \left[ 32\sigma_a^2 (K-2) / c \right]^{\frac{1}{4}} \quad (26)$$

ここで $c$ はアレイの構造によって決定される定数であり、素子間隔 $1/2$ 波長のULAの場合は以下となる。

$$c = \frac{(K^2-1)(K^2-4)}{180} (\pi \cos(\theta_m))^4 \quad (27)$$

ここで、 $\theta_m = (\theta_1 + \theta_2)/2$ である。

この(26)式は、以下の分離判定の条件式において等号成立の場合から導出されている。

$$\varepsilon \langle \hat{D}(\theta_m) \rangle \geq \varepsilon \langle \hat{D}(\theta_l) \rangle \quad l=1,2 \quad (28)$$

ユニタリの手法の場合を考慮するためには、この(28)式の条件を同様に適用すればよい。そこで、ユニタリ手法におけるヌルスペクトル摂動成分の期待値が必要となる。

ここで付録より、ヌルスペクトル摂動成分の期待値はアレイ誤差分散に比例し、ユニタリ手法では非ユニタリ手法の $1/2$ となることが示される。したがって、ユニタリ手法では(26)式においてアレイ誤差分散を $1/2$ にした場合と等価となり、次式の関係が導かれる。

$$\Delta\theta \triangleq \left[ 16\sigma_a^2(K-2)/c \right]^{1/4} \quad (29)$$

ここで $\Delta\theta$ はユニタリ手法で分離限界となる角度差を表している。上式より、ある方位差を分離するための限界となるアレイの誤差を比べれば、ユニタリ手法の場合は非ユニタリ手法の2倍まで許容されることが結論できる。

#### 4. シミュレーションと考察

前章までに導出した結果に対してシミュレーションにて検証を行う。

##### 4.1 方位推定誤差

ユニタリ手法の方位誤差の近似式は(24)式となり、非ユニタリ手法の方位誤差の近似式と等しくなることを前述した。これを確認するため、アレイ誤差による摂動を含む相関行列から、非ユニタリ手法およびユニタリ手法によるヌルスペクトルを算出した結果の一例をFig. 1に示す。アレイの条件としては12素子の半波長間隔のULAでアレイ誤差は標準偏差0.01の複素ガウス分布に従う乱数とした。また、到来信号は互いに無

相関であり到来方位を $3^\circ$ と $6^\circ$ としSNRは共に20dBとした。図中の青線はアレイ誤差が無い場合に対応し、緑の線と赤い線がそれぞれ非ユニタリ手法とユニタリ手法に対応している。また、ピーク位置を黒点で示している。

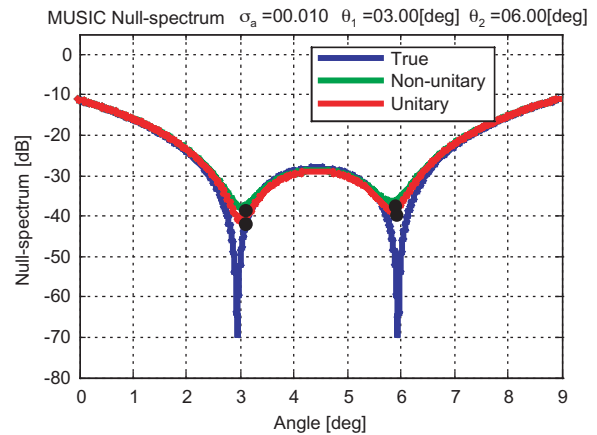


Fig. 1 Null-spectrum sample

Fig. 1よりユニタリ手法と非ユニタリ手法ではヌルスペクトルの高さが異なるものの、ピーク位置の黒点のズレが同様に生じており、方位誤差が近似的に等しくなることが予想される。

さらに詳細に調べるため、(24)式の方位誤差の理論値とシミュレーション値との比較結果をFig. 2に示す。計算条件はFig. 1と同様であり、10回の試行を行い $3^\circ$ と $6^\circ$ の方向に対応する方位誤差20点をプロットしている。上段は非ユニタリ手法における理論値とシミュレーション値の比較、中段はユニタリ手法における理論値とシミュレーション値の比較、下段はユニタリ手法と非ユニタリ手法のシミュレーション値の比較である。

三つのグラフともに傾き45度の直線上の周りで理論値と実測値が分布していることから、近似式が妥当であり、また、ユニタリ手法の方位誤差と非ユニタリ手法の方位誤差が、ほぼ同一であり差がないことも分かる。

##### 4.2 Resolution Threshold

前述の(26)式と(29)式からある角度差を分離するためにはユニタリ手法では非ユニタリ手法と比較し2倍のアレイ誤差まで許容できると期待できる。このことを確認するため、アレイ誤差分散値を2倍の関係(標準偏差を $\sqrt{2}$ 倍の関係)で変化させながら、角度差 $\Delta\theta$

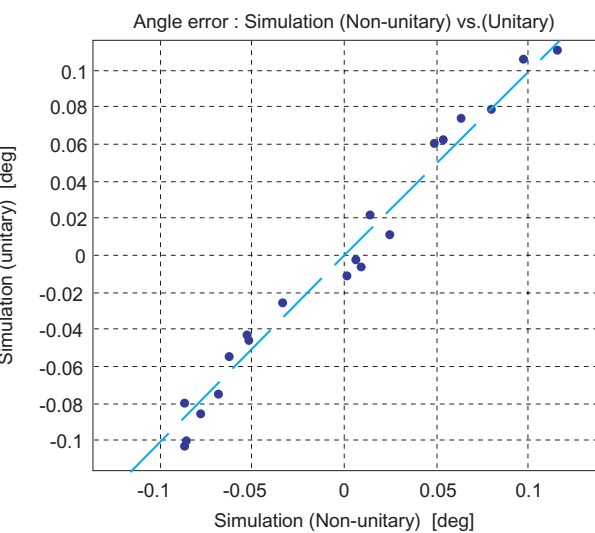
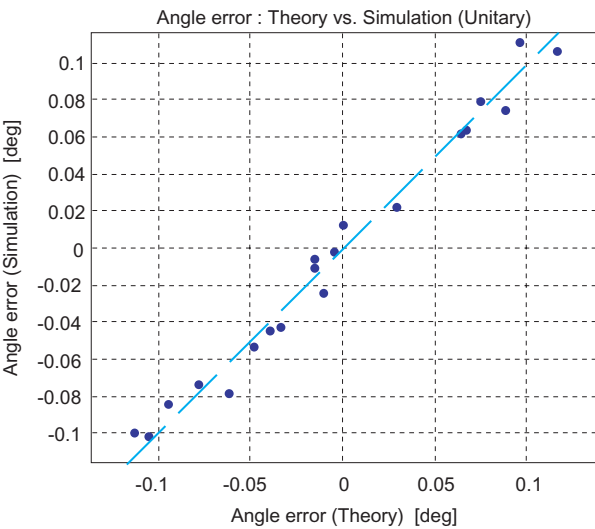
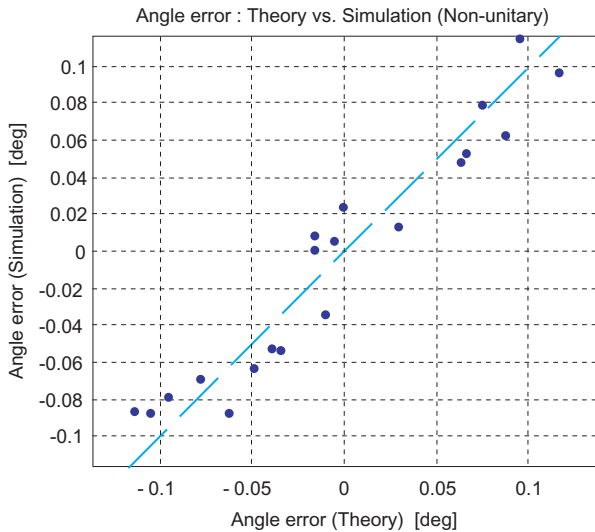


Fig. 2 Angle error : Theory vs. Simulation

に対する分離確率をシミュレーションにより算出した。この結果グラフをFig. 3に示す。アレイ誤差の標準偏差は $0.01/\sqrt{2}$ , 0.01,  $0.01 \times \sqrt{2}$ と3段階で変化させた。到来波の方位は $3^\circ$ と $3^\circ + \Delta\theta$ として $\Delta\theta$ を0.1度刻みで $0.1^\circ$ から $3.0^\circ$ まで変化させた。その他の条件についてはFig. 1のときと同様とした。アレイ誤差を変えながら1000回の試行を行い、分離成功回数の割合を分離確率として計測した。

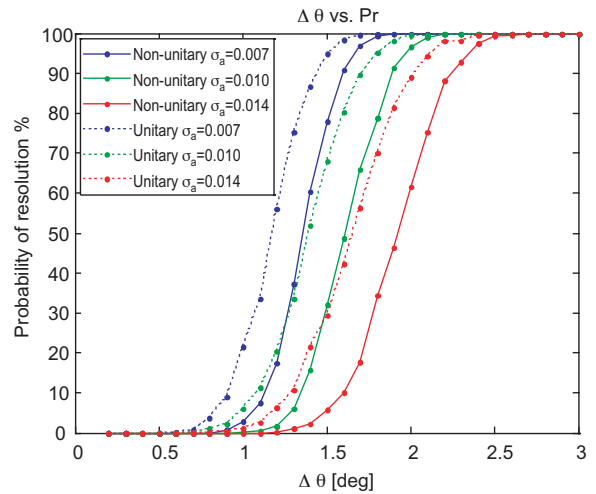


Fig. 3  $\Delta\theta$  vs. Probability of resolution

実線は非ユニタリ手法を示し点線がユニタリ手法を示している。両手法ともに右上がりとなるが、その傾斜は微妙に異なっている。分離性能としてはユニタリ手法が非ユニタリ手法より良い結果となっており、分離確率50%付近でみるとアレイ誤差標準偏差がちょうど $\sqrt{2}$ 倍（すなわち分散が2倍）ずれたライン同士が重なっている様子が分かる。以上の結果より、前章での議論の妥当性が示された。

## 5. むすび

車載アレイセンサの信号処理技術として高性能化と演算リソース低減の両立を可能とするユニタリ手法に着目した。このユニタリ手法におけるアレイ誤差に対する方位推定性能の定量的関係把握を課題として取り組みを行った。その結果、ユニタリ方式における等価アレイ誤差を導出することで、この等価アレイ誤差と従来理論から各性能指標との定量関係を明らかにした。さらにシミュレーションにより妥当性検証をおこなったところ、次の2点の知見を得ることができた。

- ・アレイ誤差に起因する方位誤差についてはユニタ

り手法と非ユニタリ手法とで近似的に等しい。

- ・ある方位差で入力される等電力無相関な2波を分離する場合、ユニタリでは非ユニタリに比較して2倍のアレイ誤差分散まで許容できる。

## 6. 謝辞

本検討に関して貴重なコメントをいただいた名古屋工業大学菊間良信教授に厚く感謝の意を表します。

### <参考文献>

- 1) 菊間信良, “アレーアンテナによる適応信号処理”, 科学技術出版(1998)
- 2) H.Krim, M.Viberg, “Two Decades of Array Signal Processing Research”, IEEE Signal Processing Magazine, Jul. (1996) pp.67-94.
- 3) K.C.Huang and C.C.Yeh, “A unitary transformation method for angle of arrival estimation,” IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.39, Apr. (1991) pp.975-977.
- 4) A.Swindlehurst and T.Kailath. “A Performance Analysis of Subspace-Based Methods in the Presence of Model Errors — Part I: The MUSIC Algorithm.” IEEE Trans. on SP, SP-40(7) : 1758-1774, July (1992)
- 5) A.J.Weiss and B.Friedlander, “Effects of Modeling Errors on the Resolution Threshold of the Music Algorithm.” IEEE Trans. on SP, Vol.42, Jun. (1994), pp.1519-1526.
- 6) M.Pesavento, A.B.Gershman, M.Haardt, “Unitary Root-MUSIC with a Real-Valued Eigendecomposition: A Theoretical and Experimental Performance Study”, IEEE Trans. on SP, Vol.48, No.5, May (2000)

### <付録>

ユニタリ手法におけるResolution Thresholdの関係式の導出

ユニタリ手法におけるResolution Thresholdの関係式を導出するために, (28)式をユニタリ手法の場合について適用する. 参考文献<sup>5)</sup>より, ヌルスペクトルの期待値 $\varepsilon\langle\hat{D}(\theta)\rangle$ は, 雑音空間への射影行列の摂動成分の期待値 $\varepsilon\langle\hat{\mathbf{U}}_N\rangle$ に関係し, これは以下のように近似できる.

$$\begin{aligned}\varepsilon\langle\hat{D}(\theta)\rangle &= \mathbf{a}^H(\theta)\varepsilon\langle\hat{\mathbf{U}}_N\rangle\mathbf{a}(\theta) \\ &= \mathbf{a}^H(\theta)\left(\mathbf{U}_N + \varepsilon\langle\hat{\mathbf{U}}_N\rangle\right)\mathbf{a}(\theta) \\ &\cong \mathbf{a}^H(\theta)\left(\mathbf{U}_N + \varepsilon\langle\delta^2\mathbf{U}_S\rangle\right)\mathbf{a}(\theta)\end{aligned}\quad (30)$$

ここで $\delta^2\mathbf{U}_S$ は射影行列の摂動項の展開式における2次の項を表す. この $\delta^2\mathbf{U}_S$ は, アレイ誤差による相関行列摂動項を $\tilde{\mathbf{R}}$ とすれば次式で表せる.

$$\begin{aligned}\delta^2\mathbf{U}_S &= \mathbf{U}_N\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{Q}^2\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{U}_N - \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{U}_N\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{Q} \\ &\quad - \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{U}_N - \mathbf{U}_N\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{Q}\end{aligned}\quad (31)$$

ここで,  $\mathbf{Q} = \mathbf{E}_S\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{E}_S^H = \mathbf{E}_S(\mathbf{\Lambda} - \sigma_N^2\mathbf{I})\mathbf{E}_S^H$ である. この(31)式の $\tilde{\mathbf{R}}$ と(18)式から非ユニタリの場合の $\delta^2\mathbf{U}_S$ が求められ次式となることが知られている.<sup>5)</sup>

$$\delta^2\mathbf{U}_S \cong p\sigma_a^2 \left[ \text{tr}\{\mathbf{\Gamma}^{-1}\}\mathbf{U}_N - (K-L)\mathbf{Q} \right] \quad (32)$$

上式より, 雑音部分空間の射影行列摂動の期待値はアレイ誤差分散にほぼ比例することがわかる.

同様に, ユニタリの場合の関係を求めるためには, (31)式に(19)式の $\tilde{\mathbf{R}}^{FB}$ を適用すればよい. そのためには,  $\tilde{\mathbf{R}}^{FB}$ と任意のエルミート行列 $\mathbf{C}$ に対する次の関係が必要となる.

$$\begin{aligned}2\varepsilon\langle\tilde{\mathbf{R}}^{FB}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{R}}^{FB}\rangle \\ = \sigma_a^2\text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{C}\} + \sigma_a^2\text{tr}\{\mathbf{C}\}\mathbf{W} \\ + \mathbf{J}\mathbf{C}^T\mathbf{J}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{J}\mathbf{C}^T\mathbf{J}\end{aligned}\quad (33)$$

ここで,  $\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{R}^2\mathbf{A}$ であり, また, 参考文献<sup>5)</sup>同様に $\mathbf{R}_s = p\mathbf{I}$ と仮定している. さらに, (25)式のアレイ誤差に関する性質から導かれる以下の関係も必要となる.

$$\begin{aligned}\varepsilon\langle\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{A}}^H\rangle &= \sigma_a^2\text{tr}\{\mathbf{G}\}\mathbf{I} \\ \varepsilon\langle\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{A}}^T\rangle &= \mathbf{0} \\ \varepsilon\langle\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{A}}\rangle &= \mathbf{G}^T \\ \varepsilon\langle\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{A}}\rangle &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (34)$$

(31)式に(33)式の関係を用いて, 以下のユニタリ手法における雑音射影行列摂動の関係式を導くことができる.

$$\delta^2\mathbf{U}_S \cong \frac{1}{2}p\sigma_a^2 \left[ \text{tr}\{\mathbf{\Gamma}^{-1}\}\mathbf{U}_N - (K-L)\mathbf{Q} \right] \quad (35)$$

前式により，ユニタリ手法においても雑音射影行列振動はアレイ誤差分散にほぼ比例することが分かり，さらに(32)式と(35)式の比較から，その振動の大きさが非ユニタリに比べほぼ1/2となることが分かる。す

なわち，ユニタリ手法は従来のResolution Thresholdの関係式(26)において，アレイ誤差分散の影響を1/2とすることと等価である。結局，関係式(29)を導出できる。



<著者>



山野 千晴  
(やまの ちはる)  
株式会社デンソーアイティラボラトリ  
センサ信号処理の開発・研究に従事



夏目 一馬  
(なつめ かずま)  
統合システム開発部  
車載センサの開発・研究に従事